UN MÉTODO PARA CONSTRUIR MATRICES DISPERSAS QUE SON ESPECTRALMENTE PRÓXIMAS A MATRICES SIMÉTRICAS CON ELEMENTOS NO DIAGONALES NO NEGATIVOS

Sergio O. Mercado Benítez, correo: sergio.mer.73@gmail.com

Tesis de Mestría en Ciencias de la Computación, Facultad Politécnica, UNA - Paraguay.

Introducción

En muchos problemas matemáticos y de computación, nos encontramos ante la necesidad de resolver la ecuación $Ax = \lambda x$, donde A es una matriz de $\mathbb{R}^{n\times n}$, x un vector de n componentes y λ un escalar. La dificultad a que esto conlleva, consiste principalmente en que los algoritmos que resuelven dicha ecuación, por lo general, tienen un tiempo de cómputo de $O(n^3)$. Por ejemplo, para el caso de matrices simétricas, es usual emplear el algoritmo de Lanczos, el cual tiene una complejidad de $O(\mu n^2)$, donde μ es el promedio de los elementos no nulos de la matriz, entonces, cuando la matriz es dispersa (matriz con muchos elementos nulos) o equivalentemente cuando el valor de μ es pequeño, esta complejidad puede ser reducida a $O(n^2)$. Por tanto, trabajar con matrices dispersas, implica una reducción en el tiempo de cómputo, y por supuesto, también una disminución en cuanto al requerimiento de recursos para almacenar la matriz, lo cual significa una importante ventaja.

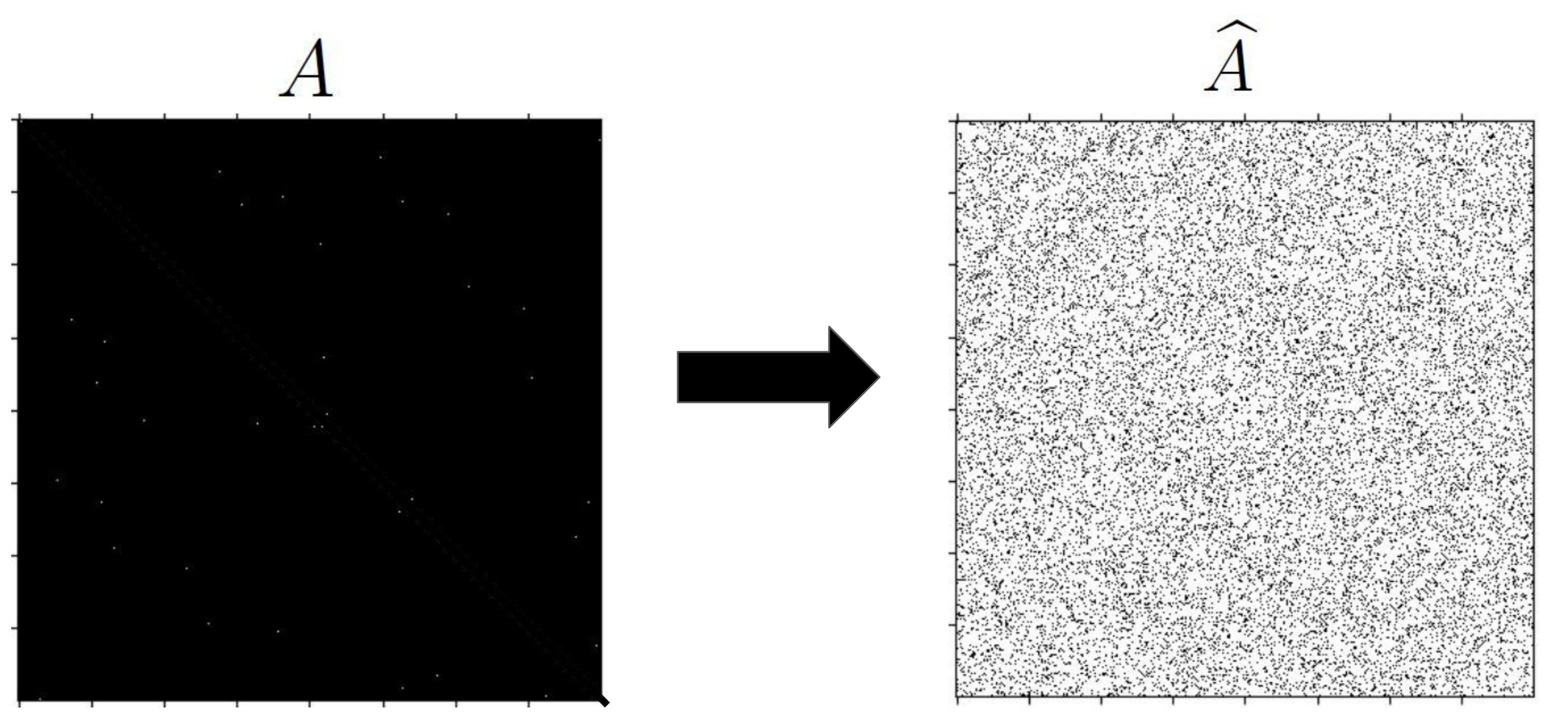

Figura 1: Esquema del objetivo general: Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ densa (esto es, una matriz con $\Omega(n^2)$ elementos no nulos), queremos construir una matriz $\widehat{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que sea dispersa (matriz con $O(n)$ elementos no nulos) tal que $Spect(A)$ sea próximo a $Spect(\widehat{A})$. El símbolo $Spect(A)$ denota al conjunto de autovalores y autovectores de la matriz A. En la imagen, los puntos blancos representan los elementos nulos de la matriz.

Generalidades y Resultado Principal

Decimos que una matriz $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es *ODN* (*del inglés off-diagonal nonnegative*) si y solo si, sus elementos fuera de la diagonal (o elementos no diagonales) son mayores o iguales a cero. Además utilizaremos las siguientes notaciones: $(M)_{ij}$, para denotar al elemento situado en la i-ésima fila y j-ésima columna de la matriz M, $\Delta_M = \max\{(M)_{ii} : i = 1, \ldots, n\}$, $\delta_M = \min\{(M)_{ii} : i = 1, \ldots, n\}$ y $\rho(M) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es un autovalor de } M\}$ (este último también es conocido como radio espectral).

El resultado principal se enuncia como sigue:

Teorema 1. *Sea $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica y ODN con autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ y respectivos autovectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Definamos $\lambda_0 = -\infty$ y $\lambda_{n+1} = \infty$. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon \leq 1/120$, existe una matriz simétrica y ODN $\widehat{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $\mathcal{O}(\frac{n}{\epsilon^2})$ elementos distintos de cero, tal que para todo $i = 1, \ldots, n$ se cumple que*

$$|\lambda_i - \widehat{\lambda}_i| \leq \epsilon\sqrt{n}\rho(L_M) + \frac{\Delta_M - \delta_M}{2}, \tag{1}$$

donde $\widehat{\lambda}_1 \geq \widehat{\lambda}_2 \geq \cdots \geq \widehat{\lambda}_n$ son los autovalores de $\widehat{M}$. Además, si $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_n$ son autovectores respectivos de $\widehat{\lambda}_1 \geq \widehat{\lambda}_2 \geq \cdots \geq \widehat{\lambda}_n$ y θ_i es el ángulo (agudo) entre los autoespacios generados por autovectores x_i y $\widehat{x}_i$, entonces

$$\sin\theta_i \leq \frac{\epsilon\sqrt{n}\rho(L_M) + (\Delta_M - \delta_M)/2}{\min\{|\widehat{\lambda}_{i-1} - \lambda_i|,\ |\lambda_i - \widehat{\lambda}_{i+1}|\}}. \tag{2}$$

La demostración del Teorema 1 es constructiva y provee un algoritmo para obtener $\widehat{M}$ (ver demostración en [3]). La Ec. (1) da una aproximación para los autovalores y la Ec. (2) para los autovectores de las respectivas matrices. Estas aproximaciones mejoran a medida que ϵ se aproxima a cero.
Observación: Ver definición de $\rho(L_M)$ en [3].

Conclusiones

El **Teorema 1** puede ser empleado en aquellos problemas en los que se trabaja con matrices de alto orden, y que a su vez solamente importa el espectro de la matriz. Si asumimos que el promedio de elementos nulos de las filas de la matriz $\widehat{M}$ es del orden $O(1/\epsilon^2)$, entonces podemos emplear el algoritmo de Lanczos para hallar el espectro de $\widehat{M}$, en un tiempo de $O\left((n/\epsilon)^2\right)$, con la garantía de aproximación indicada en las ecuaciones (1) y (2).

Publicación y Difusión

En el marco de esta tesis, se han desarrollado otros trabajos como preliminares, los cuales se citan en [1] y [2]. Dichos trabajos fueron presentados formato póster, en las conferencias CNMAC2018 y CNMAC2019, respectivamente. Además, un artículo que contiene el resultado principal, ha sido publicado en [3].

Agradecimiento

Al Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología (Conacyt) por el apoyo económico brindado al prograa de maestría.

Referencias

[1] Fabricio A Mendoza Granada, Sergio Mercado y Marcos Villagra.((Deterministic GraphSpectral Sparsification)). En:Proceeding Series of the Brazilian Society of Computationaland Applied Mathematics6.2 (2018).url:https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/viewFile/2311/2327.

[2] Sergio Mercado y Marcos Villagra.((A Study of the Optimality of PCA under SpectralSparsification)). En:Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Ap-plied Mathematics7.1 (2020).url:https://proceedings.sbmac.emnuvens.com.br/sbmac/article/view/3017.

[3] Sergio Mercado, Marcos Villagra, Bounds on the Spectral Sparsification of Symmetric and Off-Diagonal Nonnegative Real Matrices, *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications, doi:10.1142/S1793830921501093*